数学の研究を始めよう (V)

オイラーをモデルに数論研究

第6章 君はオイラー完全数をみたか

飯高 茂

平成 30 年 3 月 5 日

1　究極の完全数とその平行移動

本章の目的はオイラー 完全数の概念を新しく導入しその基本定理を確立することである. その前に準備として究極の完全数の定義を復習する.

自然数 a の約数の和を $\sigma(a)$ と書きこれを a の関数と見て ユークリッド関数という.

たとえば, $a = 6$ ならその約数は, $1, 2, 3, 6$ なので $\sigma(a) = 12$ となり $\sigma(a) = 2a$ を満たす.

$\sigma(a) = 2a$ を満たす数を完全数というだから 6 は完全数.

数学の好きな小学生, 高校生, 大学生それから熟年世代にいたるまで完全数は人気のあるテーマである.

「496 が完全数であることを示せ.」 と言われてできる大学生は少ないと思う. 496 は現代物理学でも重要な定数なのだという.

一方, プロの数学者は完全数を歓迎しない. たとえば A.Weil は『数論　歴史からのアプローチ』足立恒雄・三宅克哉訳、日本評論社、1987 年. p6, 第 1 章 § III, で次のように完全数を軽んじる発言をしている.(私は Weil の見解に反対.)

ギリシャのみならずそれ以前においても, 完全性という観念が, そのすべての約数の和が自分自身と一致するような整数に結び付けられていた. ユークリッドの数論に関する巻の最後の定理において $2^n(2^{n+1}-1)$ はその第二因子が素数であるときには完全数であることが主張されている; 著者自身も, これがその数論的な諸結果の中の白眉であると見ているように思える. この題目とそれに伴って現れるいくつかのものは, 後世の著作にも散発的に顔を出す; 恐らくこれらの概念に付された呼称が特別な興味を惹くのだろう. フェルマの同時代の人達、メルセンヌやフェルニクル、それにフェルマ自身も結構面白がっており、彼の初期の研究においてはそれなりの位置を占めていたことも事実である.(中略) しかし理論的にはほとんど意味のないものであり, このような歴史的事実がなければ, ここに取り上げる必要もなかったろう.

2 完全数の数表

$q = 2^{e+1} - 1$ が素数のとき $a = 2^e q$ は 古典的な 完全数でありここでその数表を紹介する.

表 1: 完全数の場合

$e \bmod 4$	e	$e+1$	$2^e * q$	a	$a \bmod 10$
1	1	2	$2 * 3$	6	6
2	2	3	$2^2 * 7$	28	8
0	4	5	$2^4 * 31$	496	6
2	6	7	$2^6 * 127$	8128	8
0	12	13	$2^{12} * 8191$	33550336 (1456 年)	6
0	16	17	$2^{16} * 131071$	8589869056 (Cataldi,1588 年)	6
2	18	19	$2^{18} * 524287$	137438691328 (Cataldi,1588 年)	8
2	30	31	$2^{30} * 2147483647$	A (Euler, 1772 年)	8

ここで $A = 2305843008139952128$

完全数の定義がなされ 4 つの完全数 (6,28,496,8128) が発見されたのは紀元前のことであった. それから 1500 年以上かかって, 1456 年に第 5 の完全数が発見された. さらに 100 年以上の歳月を経て第 6,7 の完全数が発見され, さらに 100 年以上かかって第 8 の完全数がオイラー (1772 年) によって発見さた.

完全数の末尾の数は 6 または 8 である. このことは古来から注目されていた.

3　m だけ平行移動した究極の完全数

P を素数とし固定して考える. 与えられた整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の (狭義の) 究極の完全数と呼ぶ.

これは次式を満たす.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1). \tag{1}$$

$\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子.

a を未知数とみなし, この式を m だけ平行移動した底が P の究極の完全数の方程式という.

またこの方程式を満たす解 a を m だけ平行移動した底が P の (広義の) 究極の完全数と呼ぶ.

$P=2$ のとき $\mathrm{Maxp}(a)$ が消えて方程式は

$$\sigma(a)-2a=-m$$

となる.

$m=0$ のときにあてはめると $\sigma(a)=2a$ になる. 解 a は広義の完全数であり, これがは狭義の完全数になるか, という問題は古来からある数学の難問である.

4　ユークリッド関数 とオイラー関数

$m=2$ のときは $\sigma(a)-2a=-2$ の解は $a=2^eq,(q=2^{e+1}+1$:フェルマ素数) と書けるか, という問題になる. これも難問で未だに解けない.

$m=4$ のときは 広義の完全数で狭義の完全数にならないものはたくさんある. このとき 広義の完全数は $a=2^eq$ または $a=2^eqr$ (ここで $q,r:$ 素数) と表せるかという問題がありこれも解けていない.

そこでいささかセコイのだが, 解けそうな問題を別に考える.

自然数 a と互いに素で a 未満の自然数の個数を $\varphi(a)$ で示しこれをオイラー関数という.

オイラー関数とユークリッド関数とはその本質において親和性がある. たとえば, 両者は乗法性をもつ.

乗法性

a,b が互いに素な自然数なら, $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. さらに $\sigma(ab)=\sigma(a)\sigma(b)$.

素数判定法

$a>1$ のとき,$a-\varphi(a)=1$ は a が素数になる必要十分条件. そこでオイラー余関数 $\mathrm{co}\varphi(a)=a-\varphi(a)$ を導入する.

$a>1$ のとき,$a-\sigma(a)=-1$ は a が素数になる必要十分条件. そこでユークリッド余関数 $\mathrm{co}\sigma(a)=\sigma(a)-a$ を導入する.

4.1　完全数と概完全数

$\sigma(a)=2a$ のとき a は完全数である.

一方 a は 2 の累乗のとき $\sigma(a)=2a-1$ を満たす.

$\sigma(a)=2a-1$ を満たす数 a は概完全数と呼ばれる. 概完全数は 2 のべきと書けるかという問題は未解決の難問.

$a=2\varphi(a)$ のとき a は 2 の累乗. 逆も正しい.

これはオイラー関数のとき問題がやさしくなる例と言えよう.

4.2　ドグマ

次の大いなるなるドグマは信じるに値する.

ドグマ

$\sigma(a)$ を用いた式や予想は $\varphi(a)$ を用いて適当に修正するとより解きやすい問題ができる.

例をあげる.

4.3　$a=2p$ 問題

p を奇素数とするとき $a=2p$ は $2\sigma(a)=3a+6$ を満たす. 逆に方程式 $2\sigma(a)=3a+6$ を満たす a は $2p(p$ は奇素数) または 8.

これのオイラー関数版は次の通り.

p を奇素数とするとき $a=2p(p$ は奇素数) は $2\varphi(a)=a-2$ を満たす. 逆に方程式 $2\varphi(a)=a-2$ を満たす a は $a=2p(p$ は奇素数).

$\sigma(a)$ のときに出てきた例外の 8 が $\varphi(a)$ のときは消えてしまう.

これは簡単な問題だが $a=6p$ 問題を同じように考えて $\sigma(a)$ で定式化すると

$\sigma(a)=2a+12$ を満たす自然数 a を決定せよ,

となるがこの問題はきわめて難しい. 古典的な奇数完全数問題よりも難しくさらに興味深い問題と思われる.

ここで完全数 6 が出てきたことに数学における深淵を見る思いがする.

しかし $a=6p$ $(p>3:$ 素数) 問題を $\varphi(a)$ を用いて定式化するときわめて簡単に解ける. 実際方程式は $3\varphi(a)=a-6$ となりこの解は $a=6p$ $(p>3:$ 素数).

5　オイラー φ 完全数

ドグマにしたがって, ユークリッド関数の代わりにオイラー関数を使って完全数と類似した概念を定義しよう.

オイラー関数のとき $\varphi(P^e),(e>1)$ は合成数になるので完全数の定義そのままは使えない. そこで, 1 を加えて $\varphi(P^e)+1$ が素数 q になるとき $a=P^eq$ をもって P を底とする (狭義) のオイラー φ 完全数と定義する.

本章の題は「君はオイラー完全数をみたか」である. 著者が細々と研究を続けてきて「書泉グランデの公開講座」で数学好きの方たちにオイラー完全数を話したことはあるが, 一般に公表するのははじめてである. 「オイラー完全数なんて聞いたことがない」というのが一般の方のご意見であろう.

さて最も簡単な $P=2$ の場合を定義に沿ってパソコンで計算してみる.

表 2: 2 を底とする狭義のオイラー φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	12	$2^2 * 3$	4
3	40	$2^3 * 5$	16
5	544	$2^5 * 17$	256
9	131584	$2^9 * 257$	65536
17	8590065664	$2^{17} * 65537$	4294967296

この結果をみると,a の素数部分には 3,5,17,257,65537 のようにフェルマ素数が並んでいるではないか. これには最初びっくりした. そして心が躍った. 冷静になって, 定義に戻り考えよう.

$P=2$ のとき $q=\varphi(P^e)+1=2^{e-1}+1$ が素数という条件なので $e-1=2^m$ と書けて結果として q がフェルマ素数になるのは当然である. フェルマ素数は 5 個あることはフェルマにより確認された. しかしフェルマが終生信じたこと, すなわちフェルマ素数 は 6 個以上ある. このことは未だに確定していない.

完全数の場合のようにこれら q と a の末尾の数をみてみよう. 10 を法としてみればよい.

$e>4$ なら $e \equiv 1 \mod 4; q \equiv 7, a \equiv 4$,$\varphi(a) \equiv 6 \bmod 10$ が成り立つ.

5 つのフェルマー素数に応じて 5 つの φ 完全数ができた. これらはフェルマ素数にちなんでフェルマ φ 完全数 と呼ぶ方がよいかもしれない. 後で一般化されたオイラー φ 完全数が導入されるであろう.

6　φ 弱完全数

フェルマ素数の判定でもわかるように素数の判定は難しいので, 素数条件をはずし弱完全数を考えてみた.

$k>0$ に関して,$e=1+4k, q_k=2^{4k}+1, a_k=2^e q_k$ とおき, a_k を 2 を底とする φ 弱完全数 という.

これから次のことがわかり証明もできる.

φ 弱完全数 の末尾 2 桁の数は 44,84,24,64,04 が繰り返される

$q_k=2^{4k}+1$ の末尾 2 桁の数は 17,57,97,37,77 が繰り返される

表 3: 2 を底とする φ 弱完全数

$e=1+4k$	q_k	素因数分解	a
5	17	17	544
9	257	257	131584
13	4097	$17*241$	33562624
17	65537	65537	8590065664
21	1048577	$17*61681$	2199025352704
25	16777217	$97*257*673$	562949986975744
29	268435457	$17*15790321$	144115188612726784
33	4294967297	$641*6700417$	36893488156009037824
37	68719476737	$17*241*433*38737$	9444732965876729380864

6.1 3 を底とするとき

$P=3$ の場合に φ 完全数を計算してみる. すなわち $q=2*3^{e-1}+1$ は素数で,$a=3^eq$ の場合の計算をする.

表 4: $P=3$ を底とするオイラー φ 完全数

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	63	3^2*7	36
3	513	3^3*19	324
5	39609	3^5*163	26244
6	355023	3^6*487	236196
7	3190833	3^7*1459	2125764
10	2324581983	$3^{10}*39367$	1549681956
17	11118121262251209	$3^{17}*86093443$	7412080755407364
18	100063090585419903	$3^{18}*258280327$	66708726798666276

定義に出てくる $q=2*3^{e-1}+1$: 素数, という条件は今まで扱ったことがない.
ここで登場する素数 $7,19,163,487,1459,\cdots$ は比較的数が多く興味深いものである.
花束を持って彼らまたは 彼女ら (素数を擬人化して呼んでいる) を歓迎しよう.

- $e\equiv 2 \bmod 4$ のとき $q\equiv 7, a\equiv 3 \bmod 10$.
- $e\equiv 1 \bmod 4$ のとき $q\equiv 3, a\equiv 9 \bmod 10$.
- $e\equiv 3 \bmod 4$ のとき $q\equiv 9, a\equiv 3 \bmod 10$.

紙数の関係で証明は略する.

7　オイラー φ 完全数の平行移動

m だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数の定義は次の通り.

$\varphi(P^e)+1+m, (e>1)$ が素数 q になるとき $a=P^e q, (e \geq 2)$ を (P を底とする) m だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数の定義とする.

特にこれを満たす a を (φ, m) 完全数とも言う.

7.1　$P=2, m=0$

さて $m=0$ の場合を計算する.

表 5: 0 だけ平行移動した (狭義の) オイラー φ 完全数

a	素因数分解
12	2^2*3
40	2^3*5
544	2^5*17
131584	2^9*257
8590065664	$2^{17}*65537$

素数部分は フェルマ素数である.

12,40 はともに $m=0$ のときのオイラー完全数である.

読者諸賢におかれては 40 歳になったらオイラー φ 完全数の祝いをするといい.

7.2　$P=2, m=2; m=4$

表 6: $P=2, m=2; m=4$

$m=2$		$m=4$	
a	素因数分解	a	素因数分解
20	2^2*5	28	2^2*7
56	2^3*7	208	2^4*13
176	2^4*11	2368	2^6*37
608	2^5*19		
8576	2^7*67		
33536	2^8*131		

7.3　$P=2, m=-2,-4,-6,-8$ の場合

II 型 すなわち m が負の偶数の場合を調べる.

表 7: $P=2, m=-2; q=2^{e-1}-1, a=2^e q$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	24	2^3*3	8
4	112	2^4*7	48
6	1984	2^6*31	960
8	32512	2^8*127	16128
14	134201344	$2^{14}*8191$	67092480
18	34359476224	$2^{18}*131071$	17179607040
20	549754765312	$2^{20}*524287$	274876858368

$m=-2$ のとき q にメルセンヌ 素数 3,7,31,127,8191,131071,524287 が並ぶ.

初めてこの結果を見たとき驚いた.

オイラー φ 完全数を平行移動も含めて定義したらまたユークリッド完全数が出てきたはないか.

考えてみると, m だけ平行移動した狭義のオイラー φ 完全数の定義では $q=\varphi(P^e)+1=2^{e-1}+1-2=2^{e-1}-1$ が素数なので, q はメルセンヌ素数になった.

ここでの オイラー φ 完全数 $a=2^e q$ はすべて, 古典的な完全数の 4 倍である.

以上からこれら完全数は古典的完全数の 4 倍であることがわかる.

表 8: $P = 2, m = -4; q = 2^{e-1} - 3$: 素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	80	$2^4 * 5$	32
5	416	$2^5 * 13$	192
6	1856	$2^6 * 29$	896
7	7808	$2^7 * 61$	3840
10	521216	$2^{10} * 509$	260096
11	2091008	$2^{11} * 1021$	1044480
13	33529856	$2^{13} * 4093$	16760832
15	536772608	$2^{15} * 16381$	268369920
21	2199016964096	$2^{21} * 1048573$	1099507433472

$e > 4$ のとき a の末尾 1 桁は 6,8.
私は 5,13,29,61,509,2021 と続く素数の列に感動した.

表 9: $P = 2, m = -6; q = 2^{e-1} - 5$: 素数の場合 の解の表

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
4	48	$2^4 * 3$	16
5	352	$2^5 * 11$	160
7	7552	$2^7 * 59$	3712
9	128512	$2^9 * 251$	64000
11	2086912	$2^{11} * 1019$	1042432
13	33513472	$2^{13} * 4091$	16752640
19	137436332032	$2^{19} * 262139$	68717903872

$e > 4$ のとき a の末尾 1 桁は 2.

表 10: $P=2, m=-8; q=2^{e+1}-7$: 素数の場合の解の表

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
40	604462909799618005958656	$2^{40}*549755813881$	X

$m=-8$ の場合は異常に解が少ない. しかし 指数 $e=40$ で解が発見された. 何という僥倖!.
ここで $X=302231454899259247165440$

8 広義のオイラー φ 完全数

狭義のオイラー φ 完全数の定義において,

$q=\varphi(P^e)+1+m=P^{e-1}\overline{P}+1+m$ なので $P^{e-1}\overline{P}=q-1-m$ であり $a=P^eq$ が狭義のオイラー φ 完全数である.

$\sigma(a)=\sigma(P^eq)=P^{e-1}\overline{P}(q-1)$, これに P を乗じて

$$P\sigma(a)=P^e\overline{P}(q-1)=\overline{P}a-P^e\overline{P}.$$

これに P を乗じて

一方, $P^e\overline{P}=P(q-1)-Pm$ のゆえに

$$P\sigma(a)=\overline{P}a-P^e\overline{P}=\overline{P}a-(P(q-1)-Pm).$$

これに P を乗じて

$\mathrm{Maxp}(a)$ で a の最大素因子をさす時 $\mathrm{Maxp}(a)=q$,

$$P\sigma(a)=\overline{P}a-P(\mathrm{Maxp}(a)-1)+Pm).$$

これに P を乗じて

かくして

$$P\varphi(a)=\overline{P}a-P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+Pm. \tag{2}$$

が得られた.

この式において a を未知数とみなしこれを m だけ平行移動した オイラー φ 完全数の方程式という.

オイラー φ 完全数の方程式を満たす解 a を m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数と呼ぶ.

$P=2$ の場合オイラー φ 完全数の方程式は簡単になる.

$$2\varphi(a)=a-2\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+2m. \tag{3}$$

9 定理と証明

次の結果がオイラー φ 完全数の基本定理である.

定理 1 $m \geq 0$ のとき

$$P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{Maxp(a)}$$

を満たす解は定義より a は P で割れるから $a = P^e L$(P, L は互いに素) と書くことができる.

⟨*1*⟩ $e > 1$ のとき a は $(\varphi, m)-$ 完全数.

⟨*2*⟩ $e = 1$ のとき $a = Pq$ となり, $q = P + m$ は素数.

Proof

$q = \mathrm{Maxp}(a)$ とおくと $P\varphi(a) = \overline{P}a + Pm - P\overline{\mathrm{Maxp}(a)}$ になり

$$P^e\overline{P}\varphi(L) = P^e\overline{P}L + Pm - P\overline{q}$$

をえる.

余関数 $\mathrm{co}\varphi(L) = L - \varphi(L)$ を用いて,

$$P^e\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) = P\overline{q} - Pm.$$

P で割って

$$P^{e-1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) = \overline{q} - m.$$

1) $L = 1$ のとき $a = P^e, q = P, \overline{q} - m = 0$. よって, $\overline{P} = \overline{q} = m; m = P - 1$.
このとき $a = P^e$ となり これを微小解という.

2). L が素数なら $\varphi(L) = 1$.
これより $P^{e-1}\overline{P} = \overline{q} - m$. よって, $q = P^{e-1}\overline{P} + 1 + m$. ゆえに $P^e q$ は $(\varphi, m)-$ 完全数. .
3). L が非素数なら $\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L)$.
$\mathrm{Maxp}(L) = \pi$ とおく.
(a) $P > \pi$ の場合,$q = \mathrm{Maxp}(a) = P, \pi \geq 2$. これより

$$\overline{q} - m = P^{e-1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) \geq P^{e-1}\overline{P}\pi.$$

$m \geq 0$ によって

$$\overline{P} = P - 1 \geq P - 1 - m = \overline{q} - m = P^{e-1}\overline{P}\mathrm{co}\varphi(L) \geq P^{e-1}\overline{P}\pi.$$

よって, $\overline{P} > P^{e-1}\overline{P}\pi$. これは矛盾.

(b) $P < \pi$ の場合,$q = \mathrm{Maxp}(a) = \pi \geq 2$.
これより $m \geq 0$ によって

$$\pi - 1 - m = \overline{q} - m \geq P^{e-1}\overline{P}\pi \geq \pi.$$

これは矛盾.

End

9.1 $e=1$ の場合

実際 $e=1$ の場合 $\varphi(P^e)=\varphi(P)=P-1$ なので, $q=\varphi(P^e)+1+m=P+m$ は素数になることが条件である.

$a=P^eq=Pq=P(P+m)$ が狭義のオイラー φ 完全数 となって簡単になり過ぎ面白みに欠ける.

いろいろやってみると $e=1$ の場合を除外するのは不自然なことでこの場合も入れておくのがよいようだ.

かくて $e=1$ のとき $q=P+m$ が素数なら $a=Pq$ は解.

これも微小解という. 微小解は形が単純で条件も確かめやすいが, 普通の解に比べて芸のない解なのである.

このようにして, $m\geq 0$ の場合にはオイラーの φ 完全数の基本問題は解決した.

しかし解決しても困ることがある. 問題がなくなって失業状態になるから.

そこで $m<0$ の場合について詳しく調べることにした.

$P=2$ の場合に限っても興味ある結果がいろいろ出てきて, 思いのほか豊穣の大地が広がっていた.

このように狭義の完全数ではありえない場合についても探求する.

広義の完全数として出てくるものは何だろうか. 私はこれを調べるにあたり心は踊り, 気分ではツチノコを探すときのような興奮を覚えたのであった.

10 オイラー φ 完全数の分類

広義のオイラー φ 完全数は狭義のオイラー φ 完全数に比べてどの程度異質なものがあるか調べよう. 定義にしたがい誠をつくし計算するほかない.

$P=2$ のとき m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数を次のように分類して調べる.

I 型. m は正で偶数

II 型. m は負で偶数

III 型. m は負の奇数

IV 型. m は正の奇数

I 型 の場合は簡単であり定理 1 により . m だけ平行移動した広義のオイラー φ 完全数 は狭義のオイラー φ 完全数になってしまう.

11 II 型, すなわち m は負で偶数

11.1 $P=2, m=-2$

古典的完全数の 4 倍が出てきた.

表 11: $P = 2, m = -2$, 広義のオイラー φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
112	$[2^4, 7]$	48
1984	$[2^6, 31]$	960
32512	$[2^8, 127]$	16128

11.2　$P = 2, m = -4$

$m = -4$ なら オイラー φ 完全数の方程式は $2\varphi(a) = a - 6 - 2q$.

表 12: $P = 2, m = -4$, 広義のオイラー φ 完全数

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
80	$[2^4, 5]$	32
416	$[2^5, 13]$	192
1856	$[2^6, 29]$	896
7808	$[2^7, 61]$	3840

解の形は正規形, すなわち $2^e q, (q :$ は素数 $)$ の形になっている.

11.3　$P = 2, m = -6$. 広義のオイラー φ 完全数

以後, $m = -6, -8, -10, -12$ の場合.

表 13: $P = 2, m = -6$ の解の表

a	素因数分解	$\varphi(a)$
48	$[2^4, 3]$	16
100	$[2^2, 5^2]$	40
352	$[2^5, 11]$	160
7552	$[2^7, 59]$	3712
128512	$[2^9, 251]$	64000

$a = 100 = 2^2 * 5^2$ のみが非通常解. それ以外は $a = 2^e q$ とかける解, すなわち正規解.

11.4 $P = 2, m = -8$

表 14: $P = 2, m = -8$. 広義のオイラー φ 完全数の表

a	素因数分解	$\varphi(a)$
196	$[2^2, 7^2]$	84

非通常解は $196 = [2^2, 7^2]$ のみ.

表 15: $P = 2, m = -10$ の広義のオイラー関数の表

a	素因数分解	$\varphi(a)$
60	$[2^2, 3, 5]$	16
72	$[2^3, 3^2]$	24
224	$[2^5, 7]$	96
1472	$[2^6, 23]$	704

非通常解は $a = 60 = [2^2, 3, 5]$, $a = 72 = [2^3, 3^2]$.

12 m 負の偶数のときの証明

$S=-m$ とおくとオイラー φ 完全数の方程式は

$$2\varphi(a)=a+2m-2(q-1), q=\mathrm{Maxp}(a).$$

これにより $a=2^eL$,(L : 奇数) とおくと

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S.$$

1. L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により ,
$2^{e-1}=1+q$. $q=2^{e-1}-1$. これより, $e=3, q=3$, など

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(1+q)\geq 2^eq.$$

$(1+q)\geq 2^{e-1}q$ になり矛盾.

$$2\varphi(a)=a+2m-2(q-1)=a-2S+2-2q$$

これより

$$2^{e-1}co\varphi(L)=q-1+S.$$

12.1 $S=2$ のときの証明

$S=2$ のとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q-1+S=q+1.$$

i). L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により , $2^{e-1}=1+q$. よって $q=2^{e-1}-1$. これらはメルセンヌ素数. $a=2^eq=4*2^{e-2}q$; 完全数の 4 倍.

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(1+q)\geq 2^eq.$$

$(1+q)\geq 2^{e-1}q$ になり矛盾. したがって $m=-2$ の場合はユークリッドの完全数の 4 倍で出来ていることが証明された.

12.2 $S=4$ のとき

オイラー φ 完全数の方程式は

$$2\varphi(a)=a-6-2q.$$

$a=2^eL$, L : 奇数, とおくとき

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q).$$

1. L : 素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)=1$ により , $2^{e-1}=3+q$. $q=2^{e-1}-3$ が素数.

2. L : 非素数なら, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ により ,

$$2^e\mathrm{co}\varphi(L)=2(3+q)\geq 2^eq.$$

$3+q\geq 2^{e-1}q$ になる. ゆえに $3\geq(2^{e-1}-1)q$. $e\geq 2$ のとき $q=3, e=2$ になり

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=(3+q)$$

から

$$\mathrm{co}\varphi(L)=3.$$

よって,$a=2^2*3^2$ が非通常解.

12.3 $S=10$ のときの証明

$S=6,8$ は飛ばして $S=10$ のとき証明する.
$S=10$ によって

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+9.$$

$L=q$:素数のとき $q=2^{e-1}-9$. $a=q=2^eq$ となりこれは狭義のオイラー φ 完全数.

$L=q^2$ のとき

$$2^{e-1}q=q+9.$$

$(2^{e-1}-1)q=9$ により $e=2,3$.
$e=2$ なら $q=9$ で矛盾.
$e=3$ なら $q=3$ となり,

$$2^2\mathrm{co}\varphi(L)=q+9=12.$$

よって $\mathrm{co}\varphi(L)=3$, $L=3^3; a=2^3*3^2$.

$L=q\mu(q>\mathrm{Maxp}(\mu))$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$. ($\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.)
i) $\mu_0=1$ なら μ:素数. $L=q\mu$ により

$$2^{e-1}(q+\mu-1)=q+9.$$

$e=2$ のとき

$$2(q+\mu-1)=q+9.$$

$$q=9+2-2\mu.$$

L: 奇数なので $\mu\geq 3$ により
$\mu=3$ なら $q=5$. よって, $a=2^2*3*5$.
$\mu\geq 4$ のとき解はない.
$e>2$ のときは矛盾が出る.
ii) $\mu_0\geq 3$ なら $L=q\mu$ により

$$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu\geq 3(q-1)+\mu\geq 3q+6.$$

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+9\geq 2\mathrm{co}\varphi(L)\geq 2(3q+6).$$

これは矛盾.
$S=10$ によって $2^{e-1}co\varphi(L)=q+9$.
1) $L=q^2$ のとき

$$2^{e-1}q=q+9.$$

$e=2$ なら $q=9$ で矛盾.

2) $L=q\mu$ のとき
$\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$.
$\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおいた.
$\mu_0=1$ なら μ:素数. $L=q\mu$ により

$$2^{e-1}(q+\mu-1)=q+9.$$

$e=2$ のとき

$$2(q+\mu-1)=q+9.$$

$$q=9+2-2\mu.$$

$\mu=3$ なら $q=5$. よって, $a=2^2*3*5$.
以上によって, 非通常解は $a=60=[2^2,3,5]$, $a=72=[2^3,3^2]$.

13 III 型, もっとも興味深い場合

m は負の奇数のとき.

狭義の オイラーの φ 完全数では起こりえない場合, すなわち m : 奇数でかつ負の数のとき調べる. 実はこの場合, もっとも興味深い結果が得られた.

はじめに 個々の場合についてパソコンによる計算で調べてみよう.

$S = -m > 0$ とおく. $q = \mathrm{Maxp}(a)$ として a の最大素因子 q を導入すると φ 完全数 についての方程式は

$$2\varphi(a) = a - 2S - 2(q-1).$$

これより a は偶数になるので $a = 2^e L$(L : 奇数) とおくとき

$$2^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + \mathrm{Maxp}(a).$$

S : 奇数なので $S - 1 + q$ も奇数. よって $e = 1; a = 2L$.

狭義の オイラーの φ 完全数では $e \geq 2$ が満たされている. S : 奇数という尋常でない場合なので $e = 1$ になったと理解しておく.

したがってこの場合 φ 完全数 についての方程式は次のようにごく簡単になる:

$$\mathrm{co}\varphi(L) = S - 1 + \mathrm{Maxp}(a).$$

13.1 $S = 1$ の場合

$S = 1$ のとき φ 完全数 についての方程式 $\mathrm{co}\varphi(L) = \mathrm{Maxp}(L)$ を解く.

以前オイラーの余関数を詳しく調べていたので結果は推測できて $L = q^2$ が解. したがって $a = 2q^2$. すなわち $2\varphi(a) = a - 2q$ なら $a = 2q^2$.

この結果は美しい. 証明は後で与える.

13.2 $S = 3$ の場合

$S = 3$ のとき φ 完全数 についての方程式を解く.

$a < 1000,000$ の範囲でパソコンによる解の全数調査をする.

結果として解が無数にでるがみな $a = 6q, (q > 3)$ の形をしている (これが通常解).

表 16: $P = 2, S = 3$

a	素因数分解
$6q, (q > 3)$	$2 * 3 * q$

14 通常解

$S=p$: 奇素数のとき, $p<q$: 奇素数 について $L=pq$ は
$\mathrm{Maxp}(L)=q, \mathrm{co}\varphi(L)=p+q-1$, $S-1+q=p-1+\mathrm{Maxp}(L)$ により $\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+\mathrm{Maxp}(L)$ を満たす.

したがって $p<q$ を満たす奇素数 q について $a=2pq$ は次式の解でこれが通常解である.

$$2\varphi(a)=a-2p-2(\mathrm{Maxp}(a)-1).$$

S が合成数のとき通常解はない. しかし非通常解はありこれらを見出すことは興味ある課題である.

14.1 $S=5,7$ の場合の計算結果

$S=5$ のとき $a=10q, (q>5)$ の形の解だけしかない.

$S=7$ のとき通常解 $14q=2*7*q$ 以外に $54=2*3^3$ が最初にでてきた解で, これが非通常解.

このような非通常解はエイリアンのような異様な風貌ではないのでツチノコと呼んでみたい. 非通常解の決定, すなわち ツチノコ探しは興味ある課題である.

ツチノコ探しを手作業で行うと手間がかかるのでパソコンによる機械的探索の結果を与える.

14.2　$S \geq 11$ の場合の計算結果

次の表は S が奇数の場合であるが解の無い場合は記さない．たとえば $S=9, S=15$ のとき解はない．

表 17: $P=2, m<0,\ S=-m \geq 11$

S	a	素因数分解
11	$22q, (q>11)$	$2*11*q$
13	$26q, (q>13)$	$2*13*q$
17	90	$2*3^2*5$
17	$34q, (q>19)$	$2*17*q$
21=3*7	126	$2*3^2*7$
21	250	$2*5^3$
23	$46q, (q>23)$	$2*23*q$
29	198	$2*3^2*11$
29	$58q, (q>29)$	$2*29*q$
31	64	2^6
31	150	$2*3*5^2$
31	$62q, (q>31)$	$2*31*q$
33=3*11	234	$2*3^2*13$
37	$74q, (q>37)$	$2*37*q$
41	306	$2*3^2*17$
41	$82q, (q>41)$	$2*41*q$
43	686	$2*7^3$
43	$86q, (q>43)$	$2*43*q$
$45=3^2*5$	342	$2*3^2*19$
47	$94q, (q>47)$	$2*47q$
$49=7^2$	350	$2*5^2*7$
51	210	$2*3*5*7$
53	414	$2*3^2*23$
53	$106q, (q>53)$	$2*53*q$
$57=3*19$	294	$2*3*7^2$
59	270	$2*3^3*5$
59	$2*118q, (q>59)$	$2*59*q$

パソコンによる計算の結果, $S=17$ のとき $a=2*17*q$ という通常解と非通常解 $a=90=2*3^2*5$ が出てきた.

これらの結果から非通常解は最小の通常解より小さいことが推定できる.

15 III 型の場合の証明

以上の結果はパソコンでの計算結果なので次に証明を行う. 証明が完了すればツチノコの生態が解明された, と言ってよい.

$S=1$ のとき.

$$\mathrm{co}\varphi(L)=q$$

が方程式でこれを解けばよい. q は L の最大素因子で, L は奇数.

15.1 $S=1$ のときの証明

i) $s(L)=1$ の場合 $L=q^j$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q$ により $j=2$.

ii) $s(L)\geq 2$ の場合. $L=q^j\mu, (q>\mathrm{Maxp}(\mu))$ と書き, $\mu_0=\mathrm{co}\varphi(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}(\mu+\overline{q}\mu_0)=q$.

これにより $j=1$, $\mu+\overline{q}\mu_0>q$ となりこれは矛盾.

よって, 奇素数 q に関して $L=q^2$. よって $a=2q^2$.

$S=3,5$ のときは同様に証明できるので略し, ここでは非通常解の出る最初の例 $S=7$ の場合を扱う.

15.2 $S=7$ のときの証明

方程式は

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=6+q$$

となりこれを解けばよい. ここで q は L の最大素因子で, L は奇数.

$L=q^j, (j\geq 2)$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+6$ によって, $j=3, q^2-q=6$.

これより $q=3$. 非通常解 $a=2*3^3$ がでる.

$L=q\mu, (q>\mathrm{Maxp}(\varphi(\mu)))$ の場合. $\mu_0=\mathrm{co}(\mu)$ とおくとき $\mathrm{co}\varphi(L)=(q-1)\mu_0+\mu$ となる.

i) $\mu_0=1$.

$\mathrm{co}\varphi(L)=q+\mu-1$ なので $q+\mu-1=q+6$. よって, $\mu=7$. $q>7$ が条件で $a=2*7q=14q$. これは通常解.

μ が非素数なら, μ は奇数なので 1) $\mu_0=3, \mu=9$,2) $\mu_0=5, \mu=25$, 3) $\mu_0=7, \mu=49, 35$ 等.

1) $\mu_0\geq 3, \mu$:非素数のとき, $\mu\geq 9$.

$$\mathrm{co}\varphi(L)\geq 3q+6, \mathrm{co}\varphi(L)=q+6\geq 3q+6.$$

これは不成立.

15.3 $S=17$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=16+q$$

が方程式でこれの解を求める.

$L=q^j, j\geq 2$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+16$, によって, $q^{j-1}-q=16$.

これより $j=3, q(q-1)=16$. 不成立

i) $\mu_0=1$. μ が素数になるので $q+\mu-1=q+16$.

よって, $\mu=17$. $q>\mu=17$ が条件で $a=2*17q=34q$. これは通常解.

ii) $\mu_0>2$. μ が非素数なので

1) $\mu_0=3, \mu=9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L)=3q+6, \mathrm{co}\varphi(L)=q+16.$$

$3q+6=q+16$ により $2q=10$. したがって $q=5, a=2*3^2*5$.

15.4 $S=21$ のときの証明

$$\mathrm{co}\varphi(L)=S-1+q=20+q$$

が方程式でこれの解を求める.

$L=q^j, (j\geq 2)$ とおくとき, $\mathrm{co}\varphi(L)=q^{j-1}=q+20$, によって, $q^{j-1}-q=20$.

これより $j=3, q(q-1)=20$. これは解けて $q=5, a=2*5^3$.

i) $\mu_0=1$. μ が素数になるので $q+\mu-1=q+20$. よって, $\mu=21$. これは素数でない.

μ が非素数なら

1) $\mu_0=3, \mu=9$ のとき,

$$\mathrm{co}\varphi(L)=3q+6, \mathrm{co}\varphi(L)=q+20.$$

$3q+6=q+20$ により $2q=14$. したがって $q=7, a=2*3^2*7$.

16 IV 型 $m:$ 正の奇数

$m:$ 奇数, 負の数 の場合が済んだので $m:$ 奇数, 正の数の場合を扱う. この場合は意外なことにきわめて簡単になる. 小さなツチノコを数多く発見した思いがした.

$P=2, m=1,3,5,\cdots$

$m+2=q$ のとき解は $a=2q$ のみ

この場合は解が完全に決まるが面白いものはでてこない.

以下証明.

$\mathrm{co}\varphi(L)=q-1-m$ を解く.

L が素数なら $\mathrm{co}\varphi(L)=1=q-1-m$ なので $q=m+2$.

L が非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L)\geq q$ なので $q\leq\mathrm{co}\varphi(L)=q-1-m$. 矛盾.

表 18: $P=2, m=1,3,5,\cdots$

m	$a=$ 素因数分解
1	6=2*3
3	10=2*5
5	14=2*7
9	22=2*11
11	26=2*13
13	none(13+2=15, 非素数)
15	34=2*17
17	38=2*19
19	none(19+2=21, 非素数)
21	46=2*23
23	none((23+2=25, 非素数)

17　$P \geq 3$ の場合

$P=2$ の場合は一通りのことは終わった．　そこで $P \geq 3$ の場合を調べるが, この場合は複雑なので $P=3$ のときに限る．

狭義のオイラー φ 完全数の定義では $q=2*3^{e-1}+1+m$ が素数という条件がついた．この条件を使うと:

$1+m$ が偶数なら, q は偶数なので $q=2$.

$e>1$ のとき $1+m$ が 3 の倍数なら $q=3$.

狭義のオイラー φ 完全数ではこのようになることを踏まえて,

$1+m \equiv 2,4 \mod 6$ なら I_2,I_4 型,

$1+m \equiv 0,3 \mod 6$ なら II_0,II_3 型,

それ以外の $1+m \equiv 1,5 \mod 6$ を III 型という．

この分類を意識しながら広義のオイラー φ 完全数について調べる．

$P=3$ のときの φ 完全数 についての方程式は次のとおり．

$$3\varphi(a)=2a-3\overline{\mathrm{Maxp}(a)}+3m.$$

17.1　$P=3, m=-1-2K$

$m+1=-2K$ のときに解がないことを示そう．

実際,

$$3\varphi(a)=2a-3(q+2K).$$

これより a は 3 の倍数になり $a=3^eL$, (L は 3 で割れない) の形に書く．

よって,

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 2K.$$

これより q : 偶数になり結局 $q = 2$. $a = 3^e L$ に矛盾.

このとき 6 を法とすれば, I_2,I_4,II_0 型のどれかになるがこのとき解はない.
したがって $m = -1, -3, -5, -7, -9$ などでは解がない.

17.2 $P = 3, m = 0$ のとき

$1 + m = 1$ なので, III 型
パソコンによる結果

表 19: $P = 3, m = 0$

e	a	素因数分解
1	6	$3 * 2$
2	63	$3^2 * 7$
3	513	$3^3 * 19$
5	39609	$3^5 * 163$
6	355023	$3^6 * 487$

この結果を踏まえて理論的に検討する.

$m = 0$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(q-1)$ を満たす. $a = 3^e L(3, L$ は互いに素) と書けるので $2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1$ を満たす.

1) L : 素数なら $2 * 3^{e-1} + 1 = q$. たとえば, $e = 1$ なら $q = 3, a = 6; e = 2$ なら $q = 7, a = 63$ など. これらは上記の表にある.

2) L : 非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q = \mathrm{Maxp}(L)$ により . $q - 1 \geq 2 * 3^{e-1}q$. これは矛盾.

17.3 $m = 0, e = 1$ のとき微小解

オイラー完全数の基本定理によれば $m = 0, e = 1$ のとき微小解 $a = Pq_0(P > q_0$; 素数) になるが $P = 3, q_0 = 2$, $a = 6$ が解. これは表の冒頭にある.
$e = 1$ のとき, $2 = q - 1 - m$. すなわち $q = 3 + m$: 素数, $L = q, a = 3q$.
一般に, 方程式

$$3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 3m$$

の解 a は 3 の倍数になり $a = 3^e L$, (L は 3 で割れない) の形に書ける.
よって,

表 20: $q = 3 + m$; 素数

m	$q = 3 + m$	$a = 3q$	素因数分解
2	5	15	3*5
4	7	21	3*7
8	11	33	3*11
10	13	39	3*13
14	17	51	3*17
20	23	69	3*23
26	29	87	3*29
28	31	93	3*31

$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q - 1$ を満たす.
L : 素数なら $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数となる e があれば $a = 3^e q$ が解.
L : 非素数なら $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ により, $q = 2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) \geq 2 * 3^{e-1}q$. よって

$$q \geq 2 * 3^{e-1}q.$$

これは矛盾.

17.4 $P = 3, m = 2$ のとき

$1 + m = 3$ なので, II_3 型
パソコンでの計算結果は次の通り.

表 21: $m = 2; 3\varphi(a) = 2a - 3\overline{\mathrm{Maxp}(a)} + 6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	$[3]$	2
9	$[3^2]$	6
15	$[3, 5]$	8
27	$[3^3]$	18
81	$[3^4]$	54
243	$[3^5]$	162
729	$[3^6]$	486
2187	$[3^7]$	1458
6561	$[3^8]$	4374
19683	$[3^9]$	13122

結果は意外なことに $a = 3^e, a = 15 = 3 * 5$ になった. そのわけを考えてみよう.

$m=2\geq 0$ なので $q=2*3^{e-1}+1+2$ が素数の場合を調べればよい. オイラー完全数の基本定理が使える.

$e=1, m=2$ のとき, $q=2+1+2=5.a=15$.

$m=P-1=2$ なので $a=3^e$ が解である.

また $P=3, m=2, q=3+2=5$. 基本定理 $\langle 4\rangle$ により $a=3*5$ が解. これは孤立解.

これ以外の解がないことを確認する.

$q=2*3^{e-1}+1+2=\varphi(3^e)+3$ は 3 で割れる素数なので $e>1$ なら $q=3$. これから矛盾. $e=1$ ならば $q=5, a*3*5=15$. これは既出.

17.5 $P=3, m=6$ のとき

$1+m=7$ なので III 型.

しかし $a \leq 10^6$ で解を全数調査した. 一見して解が少ないが wxmaxima で $q=2*3^{e-1}+1+6$:素数として探すと解がゾロゾロでてきた.

表 22: $P=3, m=6$

a	素因数分解
117	3^2*13
4941	3^4*61

表 23: $P=3, m=6$, $q=2*3^{e-1}+1+6$:素数

e	a	素因数分解
2	117	3^2*13
4	4941	3^4*61
10	2324936277	$3^{10}*39373$
12	188290077741	$3^{12}*354301$
16	1235347093894941	$3^{16}*28697821$
18	100063092909942837	$3^{18}*258280333$
25	478598658467166079446267	$3^{25}*564859072969$

3 番目の $a=2324936277$ から急激に巨大化.

ここで $a \equiv 1,7 \mod 10$ が成り立つ.

17.6 $P = 3, m = 8$ のとき

表 24: $P = 3, m = 8$

a	素因数分解
33	$3 * 11$

$m + 1 = 9 \equiv 3 \bmod 6.$ なので II_3 型
$m = 8$ のとき $q = 2 * 3^{e-1} + 9$ 素数となる e を探せば $e = 1, q = 11$; $a = 3 * 11$ が解.
$e > 1$ なら q が 3 の倍数で素数にならないので矛盾.

表 25: $P = 3, m = 10$

a	素因数分解
39	$3 * 13$
153	$3^2 * 17$
783	$3^3 * 29$
42039	$3^5 * 173$

$m + 1 = 11 \equiv 5 \bmod 6.$ なので III 型

表 26: $P = 3, m = 10$

e	a	素因数分解
2	153	$3^2 * 17$
3	783	$3^3 * 29$
5	42039	$3^5 * 173$
14	15251247582633	$3^{14} * 3188657$
29	3140085798164918157432082839	$3^{29} * 45753584909933$
35	1668770336662161617890710746387343	$3^{35} * 33354363399333149$

17.7 $P = 3, m = 12$ のとき

表 27: $P = 3, m = 12$

a	素因数分解
171	$3^2 * 19$
837	$3^3 * 31$
5427	$3^4 * 67$
363771	$3^6 * 499$

$m + 1 = 13 \equiv 1 \bmod 1$. なので III 型

表 28: $P = 3, m = 12$

a	素因数分解	
2	171	$3^2 * 19$
3	837	$3^3 * 31$
4	5427	$3^4 * 67$
6	363771	$3^6 * 499$
7	3217077	$3^7 * 1471$
12	188293266387	$3^{12} * 354307$
14	15251257148571	$3^{14} * 3188659$
28	348898422018537756444255507	$3^{28} * 15251194969987$

以上みたように, $m \geq 0$ なら $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数, となるとき $a = 3^e * q$ が解.

III 型のとき $q = 2 * 3^{e-1} + 1 + m$: 素数となる指数 e は無数にあると期待, または想像される. これらの証明をいつかはしたいものだが, できるとは到底思われない. 久遠の夢である.

18 $P=3, m<0$ のとき

18.1 $P=3, m=-2$ のとき

表 29: $P=3, m=-2$

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
1	12	$[2^2, 3]$	4
2	45	$[3^2, 5]$	24
3	459	$[3^3, 17]$	288
4	4293	$[3^4, 53]$	2808

$P=3$ のとき $a=3^e q, (q=2*3^{e-1}+1+m$: 素数) となる解を通常解という．$a=3*2^2$ は非通常解である.

$1+m=-1$ なので III 型.
$m<0$ なので非通常解が出てきた.

表 30: $P=3, m=-2$; $q=2*3^{e-1}+1-2$ が素数の場合

e	$e \bmod 4$	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	2	45	3^2*5	24
3	3	459	3^3*17	288
4	0	4293	3^4*53	2808
8	0	28691253	3^8*4373	19123128
9	1	258260643	$3^9*13121$	172160640
13	1	1694575624563	$3^{13}*106288$	1129716020160
21	1	72945992743881219603	$3^{21}*6973568801$	48630661822280577600

$e>3$ のとき $e \equiv 0,1 \bmod 4$.
$3\varphi(a)=2a-3(m-q+1)$, $(q=\mathrm{Maxp}(a))$ を満たす.
$m=-2$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-2-q+1)=-3(q+1)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL(3, L$ は互いに素).
さらに $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+1$ を満たす.

1. L が素数.
$\mathrm{co}\varphi(L)=1$ なので $2*3^{e-1}=q+1$.
$L=2$ または $L\geq 5$.

a). $L=2$.
$q=3$ になるので, $2*3^{e-1}=q+1=4$ により起きない.

b). $q\geq 5$. $L=q$ になる. よって $2*3^{e-1}=q+1$ を満たすので $2*3^{e-1}-1$ が素数になる e を探して, $q=2*3^{e-1}-1$ とおけば
$q=\varphi(3^e)-1+2$, になり $a=3^eq$ が解.
これは狭義の完全数である.
たとえば, $e=2$ のとき $q=2*3-1=5, a=3^2*5$,
$e=3$ のとき $q=2*9-1=17, a=3^3*17$.

2. L が非素数.
a). $\mathrm{Maxp}(L)<3$ のとき $L=2^f$ と書ける. $q=3$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+1=4$ によって, $f=2, e=1; a=3*2^2$.
b). $\mathrm{Maxp}(L)>3$.
$a=3^eL$ によって, $q=\mathrm{Maxp}(a)=\mathrm{Maxp}(L)$.
よって, $\mathrm{co}\varphi(L)\geq \mathrm{Maxp}(L)=q$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+1>2*3^{e-1}*q$ により矛盾.

18.2 $P=3, m=-4$ のとき

$m+1=-3\equiv 3 \bmod 6$. なので II_3 型

表 31: $P = 3, m = -4$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
18	$[2, 3^2]$	6

$m = -4$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-4 - q + 1) = -3(q + 3)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L$ は互いに素) とすると.
$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = q + 3$ を満たす.
これより $e > 1$ なら $q \equiv 0 \bmod 3$. ゆえに $q = 3$.
$e = 1$ なら $q = -1$ で矛盾.
1. L が素数.
$\mathrm{co}\varphi(L) = 1$ なので $2 * 3^{e-1} = q + 3$.
$e > 1$ のとき $q = 3(2 * 3^{e-2} - 1)$ となり, $e = 2, q = 3$ をえるので矛盾.

2. L が非素数.
a). $\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3$. $L = 2^f$ とおくと

$$2 * 3^{e-1} \mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 3 = 6.$$

$f = 1, e = 2$ よって, $a = 2 * 3^2$.

b). $\mathrm{Maxp}(L) = q > 3$ のとき.

$$q + 3 \geq 2 * 3^{e-1} q \geq 2q.$$

これより $q = 3$ となり矛盾.
このとき解は 1 つのみ.

18.3 $P=3, m=-6$ のとき

表 32: $P=3, m=-6$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
24	$[2^3, 3]$	8
75	$[3, 5^2]$	40
351	$[3^3, 13]$	216

$m+1=-5 \equiv 1 \bmod 6$ なので III 型

表 33: $P=3, m=-6$ $q=2*3^{e-1}+1-6$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
2	9	3^2	6
3	351	3^3*13	216
5	38151	3^5*157	25272
7	3177711	3^7*1453	2117016
11	20919820671	$3^{11}*118093$	13946429016
13	1694569247271	$3^{13}*1062877$	1129711768632
14	15251171055129	$3^{14}*3188641$	10167444181440
20	8105110288604030529	$3^{20}*2324522929$	5403406856744830752

$m=-6$ のとき $3\varphi(a)-2a=3(-6-q+1)=-3(q+5)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a=3^eL, (3, L$ は互いに素) とすると.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+5$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L)=2$ のとき $q=3, L=2^f$.
$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2^f*3^{e-1}=q+5=8$ を満たす.
よって,$f=3, e=1$. $a=2^3*3$.

$\mathrm{Maxp}(L)>3$ のとき $q=\mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2*3^{e-1} = q+5$ を満たす.
$q = 2*3^{e-1} - 5$:素数 となる e を探す.
たとえば
$e = 3$ のとき $q = 13$.
2. L が非素数.
$\mathrm{Maxp}(L) = q > 3$ のとき. $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+5$ を満たす.

$$q+5 \geq 2*3^{e-1}q \geq 2q.$$

$q = 5$ となるとき $e = 1$. $2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q+5 = 10$ を満たす.
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 5$; $e = 1, \mathrm{co}\varphi(L) = 5$.
よって, $L = 5^2; a = 3*5^2$

18.4 $P = 3, m = -8$ のとき

表 34: $P = 3, m = -8$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
30	$[2, 3, 5]$	8
147	$[3, 7^2]$	84
297	$[3^3, 11]$	180
3807	$[3^4, 47]$	2484

$m + 1 = -7 \equiv 5 \bmod 6$ なので III 型

表 35: $P = 3, m = -8$; $q = 2 * 3^{e-1} + 1 - 8$ が素数の場合

e	a	素因数分解	$\varphi(a)$
3	297	$3^3 * 11$	180
4	3807	$3^4 * 47$	2484
6	349191	$3^6 * 479$	232308
7	3173337	$3^7 * 1451$	2114100
10	2324109591	$3^{10} * 39359$	1549367028

$m = -8$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-8 - q + 1) = -3(q + 7)$ を満たす.
これより $a \equiv 0 \mod 3$. よって $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素).
よって $2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 5$ を満たす.

1. L が素数.
$2 * 3^{e-1} + 1 - 8 = q$. たとえば $e = 3$ とすると, $q = 11; a = 3^3 * 11$.

2. L が非素数. $\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3, L = 2^f$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 7 = 10 = 2 * 5$ を満たすことはできない.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.
$\mathrm{co}\varphi(L) \geq \mathrm{Maxp}(L) = q$. よって

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) + 1 = q + 8 \geq 2 * 3^{e-1} q.$$

$q + 8 \geq 2 * 3^{e-1} * q \geq 2 * q$. よって, $q \leq 8$ なので $q = 7, 5$.

a) $q = 7$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 7 = 2 * 7.$$

$e=1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L)=7$. $L=7^2$ または $L=3*5=15$.
すると $L=7^2$ なら $L=7^2, e=1, a=3*7^2$. $L=15$ なら L が 3 の倍数になり矛盾.

b) $q=5$.

$$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=q+7=12.$$

$2*3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=12=2^2*3$ により
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L)=2*3$. したがって, $e=1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L)=6$ により, $L=10$; $a=2*3*5$.

18.5 $P = 3, m = -10$

表 36: $P = 3, m = -10$

a	素因数分解	$\varphi(a)$
36	$[2^2, 3^2]$	12
42	$[2, 3, 7]$	12

$m + 1 = -9 \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型
$m = -10$ のとき $3\varphi(a) - 2a = 3(-10 - q + 1) = -3(q + 9)$ を満たす.
$a \equiv 0 \mod 3$ により, $a = 3^e L, (3, L,$ は互いに素) とすると.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9$ を満たす.

$\mathrm{Maxp}(L) = 2$ のとき $q = 3, L = 2^f$.
$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 2^f * 3^{e-1} = q + 9 = 12 = 3 * 2^2$ を満たす.
ゆえに $e - 1 = 1, f = 2; a = 2^2 * 3^2$.

$\mathrm{Maxp}(L) > 3$ のとき $q = \mathrm{Maxp}(L)$.

1. L が素数.
$2 * 3^{e-1} + 1 - 10 = q$. これを満たす素数 q はない.

2. L が非素数. $\mathrm{co}\varphi(L) \geq q$ によって

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 \geq 2 * 3^{e-1}q.$$

$q + 9 \geq 2 * 3^{e-1} * q \geq 2 * q$. よって, $q \leq 9$ なので $q = 7, 5$.

a) $q = 7$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 16 = 2^4.$$

$e = 1$ になり $\mathrm{co}\varphi(L) = 8$. $L = 16$ または $L = 14, 12$.
$\mathrm{Maxp}(L) = q = 7$ によれば L は $q = 7$ の倍数. よって $L = 14$. $e = 1$ により $a = 2 * 3 * 7$.

b) $q = 5$.

$$2 * 3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = q + 9 = 14.$$

よって
$3^{e-1}\mathrm{co}\varphi(L) = 7$. したがって, $e = 1$ なら $\mathrm{co}\varphi(L) = 7$ により, $L = 7^2$. $\mathrm{Maxp}(L) = q = 5$ に反する.

18.6 $P=3, m=-11$ のとき

解なし

19 $P=3, m=-4-6k$

$m=-10$ のとき解が 2 つしかない.

この理由を考えるために $m=-10$ を法 6 で一般化すると $m=-4-6K$ または $m=-7-6K$ である.

$m=-4-6K$ のときは解がわずかながら見つかる. このとき東の丘という.

$m=-7-6K$ のときは解がまったく見つからない. このとき, 西の丘と言うことにした.

私は東の丘には、ツチノコが少数ずついるが西の丘には、ツチノコが全然いない. それを証明しよう.

この場合の型を調べる.

$m=-4-6K$ ならば $m+1=-3-6K \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型

$m=-7-6K$ ならば $m+1=-6-6K \equiv 0 \bmod 6$ なので II_0 型. この場合は起きない

19.1 $P=3, m=-16$

表 37: $P=3, m=-4+6K=-16, K=-2$

a	素因数分解
54	$2*3^3$
78	$2*3*13$
105	$3*5*7$

$m+1=-15 \equiv 3 \bmod 6$ なので II_3 型